MATEMÁTICA DISCRETA II

APELLIDOS	NOMBRE	Nº MATRÍCULA

EJERCICIO 1 (12 ptos.)

Sea *G* un grafo conexo, simple de 14 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 9 y el número de aristas es múltiplo de 34. Se pide:

A) ¿Tiene *G* ciclos de longitud impar? ¿Es el grafo *G* hamiltoniano?

B) Halla el número de aristas de *G* y decide si *G* es un grafo planar.

C) ¿Es el grafo *G* euleriano?

Solución (4 + 4 + 4)

A) Si *G* es bipartido y $\delta(v) \geq 9$, entonces card $V_1 \geq 9$ y card $V_2 \leq 5$, por tanto, los vértices de V_1 no cumplen que $\delta(v) \geq 9$. Luego *G* no es bipartido $\Leftrightarrow$ *G* tiene ciclos de longitud impar.

G es hamiltoniano ya que $\delta(v) \geq 9 \geq n/2 = 7$.

B) *G* simple, entonces $9 \leq \delta(v) \leq 13 \Rightarrow$

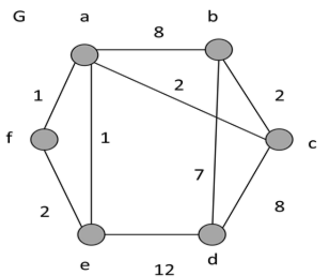
$$\frac{9.14}{2} \leq \frac{1}{2}\sum \delta(v) = q \leq \frac{13.14}{2} \Rightarrow 63 \leq q \leq 91 \Rightarrow q = 68$$

Si *G* es conexo y simple, como $q = 68 > 3(n-2) = 36$, entonces *G* no es planar.

C) Si *G* es euleriano entonces $\delta(v) = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 12y = 136 \\ x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow x = 16, y = -2$, por tanto, *G* no es euleriano.

EJERCICIO 2 (5 ptos.)

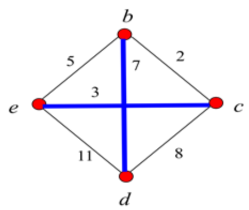
Resuelve el problema del cartero en el siguiente grafo *G*.



Solución

Se forma un grafo completo con los 4 vértices de grado impar K_4 = {b, c, d, e} y se halla un emparejamiento de peso mínimo. Se duplican las aristas del emparejamiento [bd, ce].

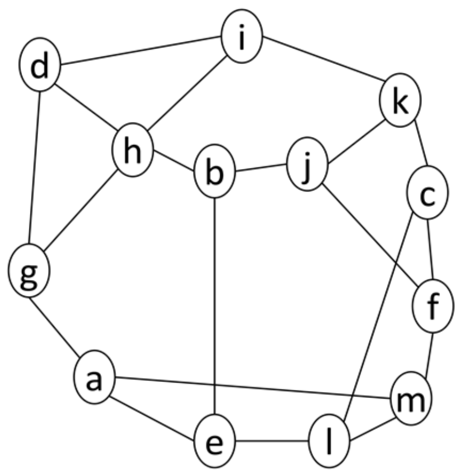
Se duplican las aristas del conjunto {ac, ae, bd}.



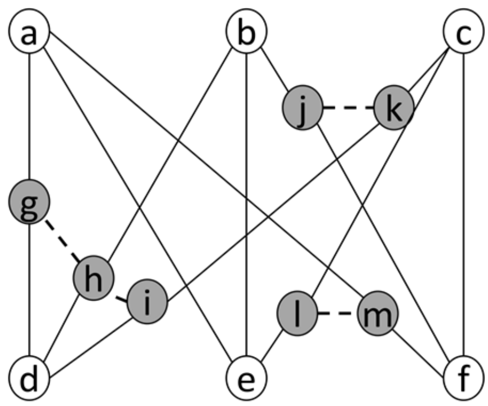
MATEMÁTICA DISCRETA II

EJERCICIO 3 (5 ptos.)

Estudia la planaridad del grafo siguiente. Si no es planar, demuéstralo aplicando el teorema de Kuratowski o el teorema de Wagner, enunciando formalmente el teorema utilizado.



Solución



El grafo no es planar: eliminando las aristas marcadas, el subgrafo obtenido es homeomorfo a $K_{3,3}$ (borrando los vértices de grado 2 g, h, i, j, k, l, m).
Por el teorema de Kuratowski se deduce que no es planar.

EJERCICIO 4 (8 ptos.)

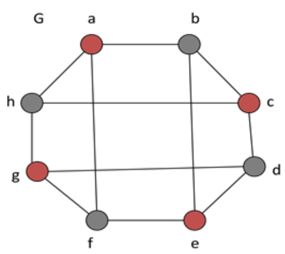
A) Construye tres grafos hamiltonianos de $n = 8$ vértices, regulares de grado 3 y no isomorfos.

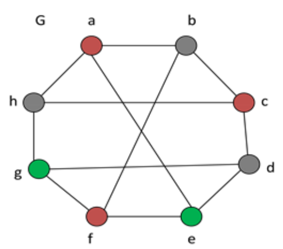
B) Demuestra que si un grafo G es hamiltoniano y regular de grado 3, entonces el índice cromático de G es 3.

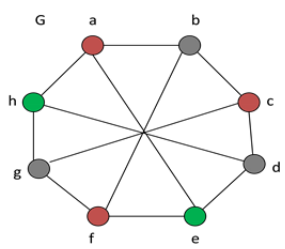
C) Halla el polinomio cromático del grafo C_4.

Solución (3 + 3 + 2)

A)







B) Si G es hamiltoniano y tiene n vértices entonces contiene un ciclo con n aristas.

Si G es regular de grado 3 entonces el número de vértices de G es n par.

Las aristas del ciclo que contiene a los n vértices se colorean con dos colores y las aristas restantes con un tercer color, luego el índice cromático de G es 3.

C) $P(C_4, k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$.

MATEMÁTICA DISCRETA II

EJERCICIO 5 (10 ptos.)

Sea G el grafo que representa las preferencias de las personas del conjunto {**a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**} al sentarse en los vértices de una mesa octogonal. Sabiendo que **a** prefiere no sentarse junto a **b** ni **d**; **b** prefiere no sentarse junto a **e**, **f** ni **h** ; **c** prefiere no sentarse junto a **d** ni **e** ; **d** prefiere no sentarse junto a **g** ; **e** prefiere no sentarse junto a **f** y tanto **f** como **g** prefieren no sentarse junto a **h**,

A) encuentra una forma de sentar a las 8 personas, respetando las preferencias de todas ellas.

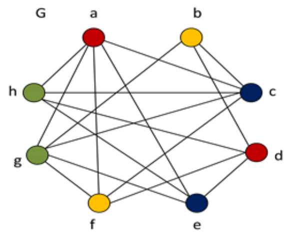
B) halla razonadamente el número cromático del grafo G.

C) halla razonadamente el índice cromático del grafo G.

Solución (2 + 4 + 4)

A) Existe un ciclo hamiltoniano: $C = \{a, c, f, g, b, d, h, e, a\}$.

B) G contiene a $K_4 = \{a, c, f, g\}$, luego $\chi(G) \geq 4$.



El algoritmo de Brelaz colorea con 4 colores, entonces $\chi(G) = 4$.

V	**a**	**c**	**g**	**d**	**e**	**f**	**h**	**b**
Color	1	2	3	1	2	4	3	4
$\delta_s(v)$		1	1	0	1	1	1	0
$\delta_s(v)$			2	0	1	2	2	1
$\delta_s(v)$				0	2	3	2	2
$\delta_s(v)$				1	2		2	2
$\delta_s(v)$				2			2	2
$\delta_s(v)$				2				3

C) Teorema de Vizing: Si G es un grafo simple entonces $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G)+1$, por tanto, $5 \leq \chi_1(G) \leq 6$. Se presenta una coloración con 5 colores, entonces $\chi_1(G) = 5$.